

پیش نیازها: هیپی سلامتیت!

هندسه دوازدهم

(فصل ۶ ریاضی دوازدهم)

رشته ریاضی (۱ تست)

رشته تجربی (۱ یا ۲ تست)

بودجه بندی این فصل در کنکور؟

به قلم و روش بهنام سرهنگی

T در شکل زیر، پاره خط داده شده را حول محور دوران داده ایم؛ حجم شکل حاصل کدام است؟ (کتاب درسی) $52\pi(1) \quad \frac{52\pi}{3}(2) \quad 26\pi(3) \quad \frac{26\pi}{3}(4)$

A

دوران اشکال اولیه حول یک خط، درجه دوران می‌کنند. به آن خط محور دوران (۱) می‌گویند. اگر شکل دوران کننده یک خط (پاره‌خط یا نیم‌خط) باشد، شکل حاصل از دوران دو بعدی یا یک حجم توفالی (پوسته) است. ۲) اگر شکل دوران کننده دو بعدی باشد، شکل حاصل سه بعدی و توپر است.

چرخش‌های معروف خطوط (دسته اول)

دوران پاره‌خط پسیپره به محور و عمود بر آن، حول محور

شکل حاصل از دوران، می‌شود یک سطح دایره‌ای به شعاع طول پاره‌خط.

چرخش‌های یک سطح هندسی (مثل دایره، مثلث و ...) (دسته دوم)

برای دوران شکلی که نسبت به محور دوران متقارن است، نصف آن شکل را در نظر بگیر و بپاشان.

دوران دایره

دوران یافته‌ی نیم‌دایره حول قطرش می‌شود کره‌ی توپر.

طبق نکته بالا، دوران یافته یک دایره حول قطرش نیز یک کره توپر است.

دوران یافته‌ی نیم‌دایره حول شعاع عمود بر قطرش می‌شود نیم‌کره‌ی توپر.

طبق نکته بالا، دوران یافته یک ربع دایره حول شعاعش نیز یک نیم‌کره توپر است.

دوران پاره‌خط پسیپره به محور و غیر عمود بر آن، حول محور

شکل حاصل از دوران، می‌شود یک مخروط توفالی که طول پاره‌خط، مولد آن است. اگر بیای پاره‌خط، نیم‌خط بود، شکل حاصل یک مخروط بی انتها میشد.

دوران پاره‌خط غیر عمود بر محور که به آن نه‌پسیپره؛

شکل حاصل از دوران، می‌شود یک مخروط سرپسیده توفالی که طول پاره‌خط، مولد آن است. اگر بیای پاره‌خط، نیم‌خط بود، شکل حاصل یک مخروط ناقص بی انتها میشد.

در ادامه برش زدن حجم‌های معروف می‌رسیم به مخروط ☐ مخروط ☐ اول بررسی ۲ حالت داریم...

اگر صفحه برش شامل محور مولد مخروط و بر آن مماس باشد، سطح مقطع یک خط و اگر بر اس مخروط مماس باشد سطح مقطع یک نقطه است.

صفحه برش عمود بر محور است ☐ صفحه برش شامل محور است ☐

سطح مقطع یک دایره است برای مخروط توغالی؟
سطح مقطع یک مثلث است برای مخروط توغالی؟

صفحه برش نه عمود بر محور است نه موازی (و از قاعده‌ی مخروط نمیگذرد) ☐

سطح مقطع یک بیضی است ☐

T مثلث قائم الزاویه متساوی الساقینی به وتر ۱ حول ضلع قائمه خود دوران می‌کند. شکل حاصل را با صفحه‌ای که شامل محور آن است برش می‌دهیم. مساحت سطح مقطع حاصل کدام است؟
 $\frac{1}{4}$ (۱) ✓ $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۲

دوران مستطیل دوران یافته مستطیل چه حول طولش، چه حول عرضش می‌شود یک استوانه توپرا

$V = \pi b^2 a$ $S = 2\pi b a$

T در شکل روبه رو، ربع دایره درون مربع ABCD قرار گرفته است. اگر مربع را حول خط d دوران دهیم، حجم شکل حاصل از دوران ناحیه سایه زده شده چقدر است؟

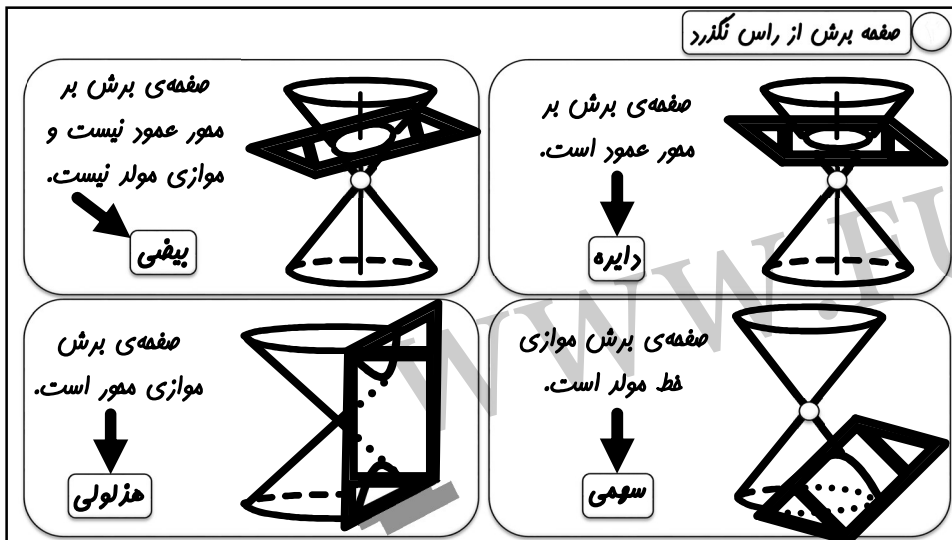
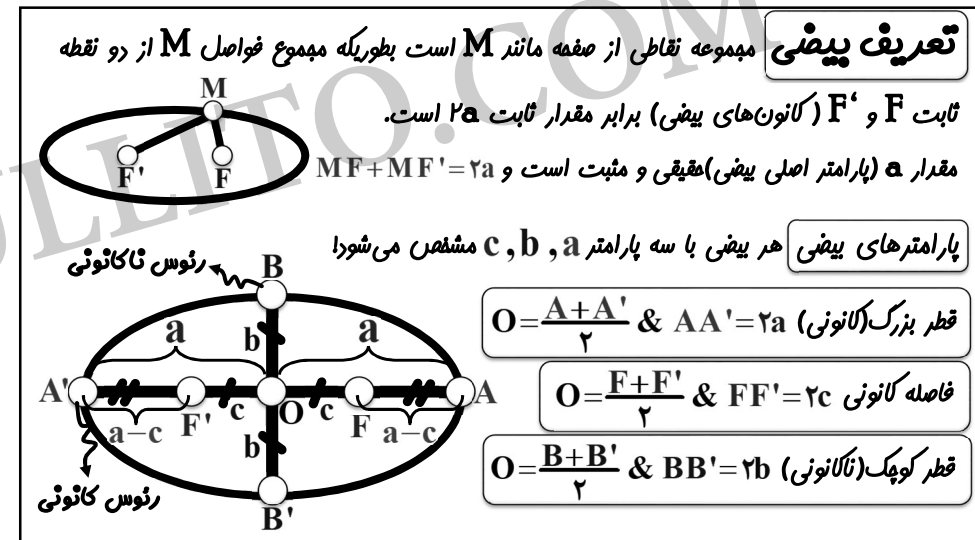
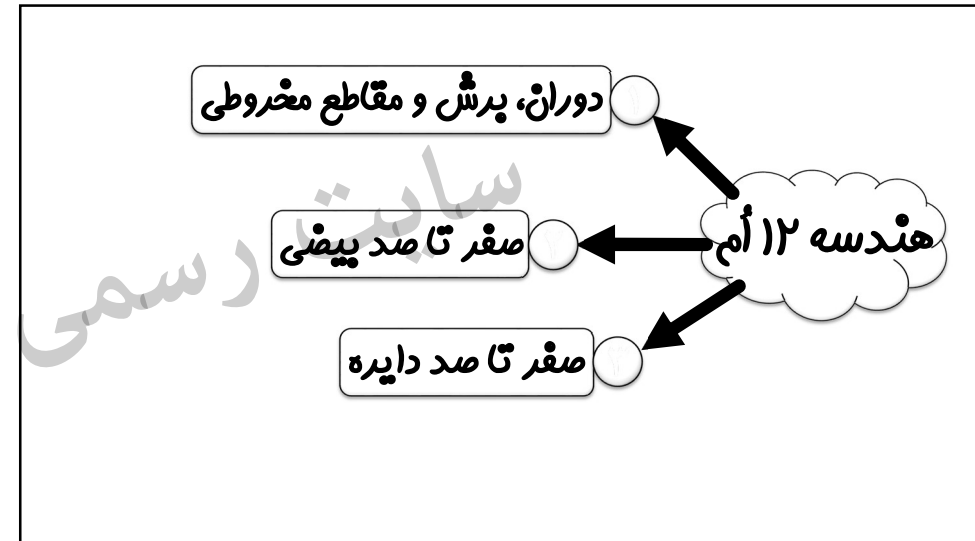
$\frac{16\pi}{3}$ (۴) $\frac{128\pi}{3}$ (۳) $\frac{64\pi}{3}$ (۲) $\frac{32\pi}{3}$ (۱)

برش زدن حجم‌های معروف ☐ استوانه ☐

اگر صفحه برش هم از سقف و هم از کف استوانه بگذرد سطح مقطع یک مستطیل است.

اگر صفحه برش بر محور استوانه عمود باشد، سطح مقطع دایره است.

$S = \pi r^2$



ارتباط بین پارامترهای بیضی

$a, b, c > 0$ و $a^2 = b^2 + c^2$ و $a > b$ و $a > c$

T در بیضی مقابل که B و B' رأس های ناکانونی و A رأس کانونی است، مثلث BAB' متساوی الاضلاع است. کدام است؟ $\frac{c}{b}$

$\sqrt{2}$ (۱) ✓ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴)

محورهای تقارن بیضی

۲ خط عمود بر هم که دربردارنده ی قطرهای بزرگ و کوچکند مرکز بیضی روی هر دو محور تقارن هستند پس اگر معادله ی دو محور تقارن را دارند، نقطه ی برخورد آنها همان مرکز بیضی است.

بیضی در حالت استاندارد قائم یا افقی است. اما ممکن است در مسائل مربوط به محور تقارن، بیضی غیراستاندارد یا مایل نیز ببینید. در این حالت نیز مرکز بیضی محل تقاطع محورهای تقارن بیضی است.

$ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$

حل دستگاه $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ جواب O

خروج از مرکز بیضی برابر است با میزان تپل یا نازک بودن بیضی را نشان میدهد

$0 < e < 1$ و $0 < c < a \xrightarrow{\div a} \frac{0}{a} < \frac{c}{a} < \frac{a}{a} \rightarrow 0 < e < 1$

هرچه مقدار e به صفر نزدیکتر شود، بیضی تپل تر میشود و به دایره شدن میل میکند.

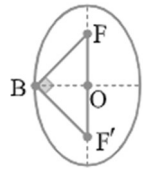
هرچه مقدار e به یک نزدیکتر شود، بیضی نازک تر میشود و به خط شدن میل میکند.

T اگر خط $2x - y + 5 = 0$ یکی از محورهای تقارن بیضی با مرکز $(-1, 3)$ باشد، در این صورت محور تقارن دیگر بیضی محور وها را در نقطه ای با کدام عرض قطع می کند؟

$2/5$ (۴) ✓ -5 (۳) 5 (۲) $-2/5$ (۱)

A

T در بیضی شکل مقابل، اگر $\hat{B'BF} = 90^\circ$ باشد، خروج از مرکز بیضی

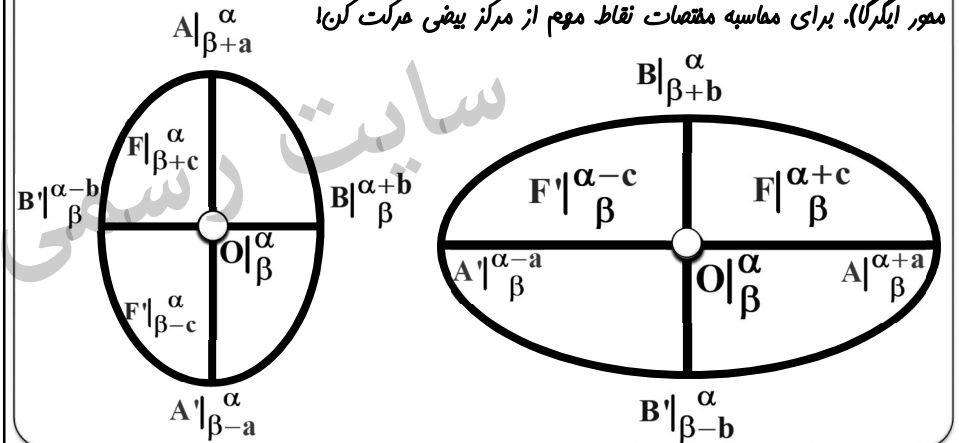


کدام است؟ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) ✓ $\frac{1}{2}$ (۱)

A

نقاط مهم بیضی بیضی ۲ مدل دارد. افقی (قطر بزرگ موازی محور ایکسا) و قائم (قطر بزرگ موازی

محور ایکس). برای مناسبه مقصود نقاط مهم از مرکز بیضی حرکت کن!



T یک بیضی به مرکز O و قطر کوچک ۲b در نظر بگیرید. به مرکز O و شعاع b دایره ای می زنیم.

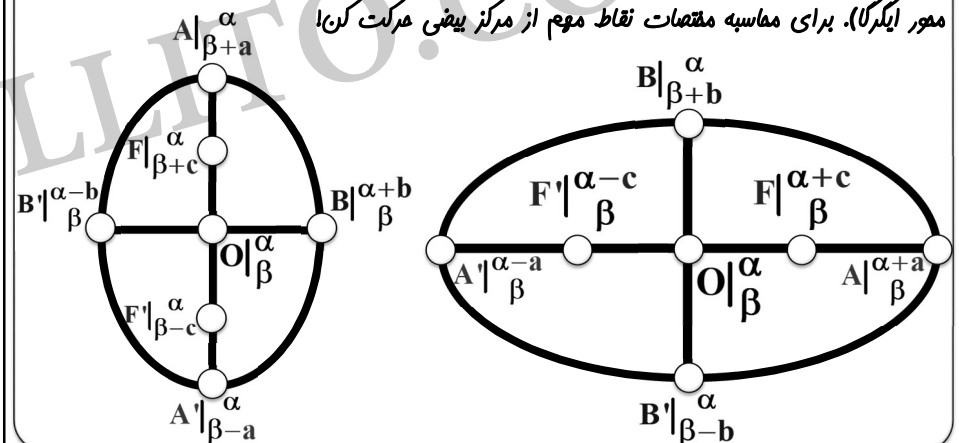
اگر این دایره از کانون ها بگذرد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

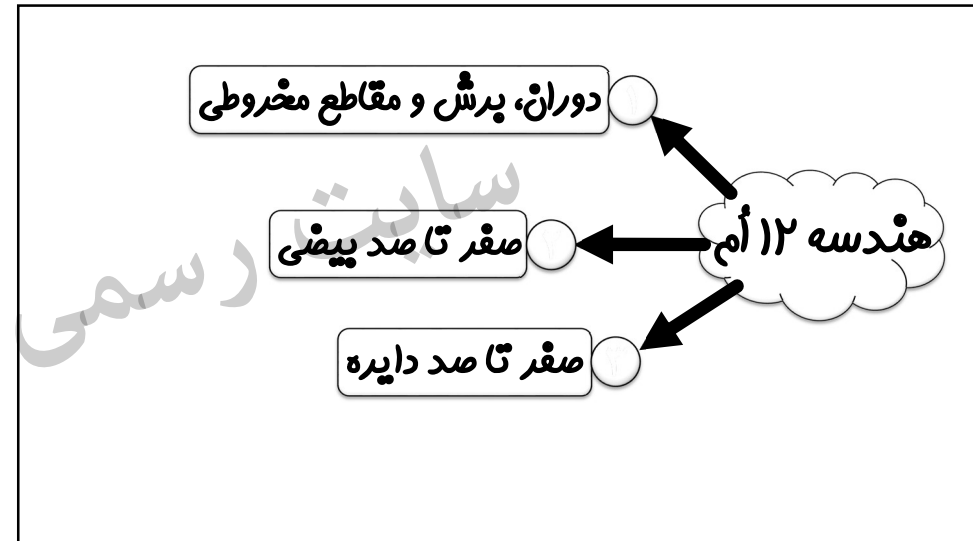
$\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) ✓ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

A

نقاط مهم بیضی بیضی ۲ مدل دارد. افقی (قطر بزرگ موازی محور ایکسا) و قائم (قطر بزرگ موازی

محور ایکس). برای مناسبه مقصود نقاط مهم از مرکز بیضی حرکت کن!





T خروج از مرکز یک بیضی با قطر کوچک ۲، برابر با $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. اگر مرکز بیضی نقطه $(-3, -1)$ باشد، کدام نقطه نمی تواند مختصات یکی از کانون های این بیضی باشد؟

$(-2, -1)$ (۱) $(-3, -2)$ (۲) $(-3, 0)$ (۳) $(-4, 1)$ (۴) ✓

A

صفر تا صد دایره دایره مجموعه تمام نقاطی از صفحه است که از نقطه‌ی ثابت O به فاصله‌ی ثابت r باشند. این دایره را با نماد $C(O, r)$ نمایش می‌دهیم. پاره‌قطی که دو سر آن روی محیط دایره باشد وتر نام دارد. بزرگترین وتر (گذرا از مرکز دایره) قطر است. هر دایره بیشمار قطر دارد. تمام قطرهای دایره در مرکز دایره با هم متقاطعند.

T در یک بیضی افقی با مرکز $O(-4, -1)$ ، طول قطر کوچک و خروج از مرکز آن به ترتیب $\frac{4}{5}$ واحد و $\frac{4}{5}$ است. کدام نقطه زیر روی این بیضی قرار ندارد؟ (کتاب درسی)

$(-1, -1)$ (۱) ✓ $(-4, -4)$ (۲) $(-4, 2)$ (۳) $(-9, -1)$ (۴)

A

معادله گسترده دایره با نوشتن ۲ اتحاد اول در فرم استاندارد، به فرم گسترده می‌رسیم.

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \rightarrow (x^2 + y^2) - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

همیشه ضرایب ایکس دو و ایکلر دو باید برابر (نه صرفاً یک) باشد. ☐

در صورتی که ضریب ایکس دو و ایکلر دو یک باشد (روال باشد)، داریم: ☐

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow \alpha = -\frac{a}{2}, \beta = -\frac{b}{2}, r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$$

معادله استاندارد دایره معادله استاندارد دایره $C(0, r)$ که $o(\alpha, \beta)$ به صورت زیر است (پهرا):

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

نکات برداشتی ازین معادله $\downarrow\downarrow\downarrow$

همیشه ضرایب ایکس و ایکلر داخل پرانتز باید برابر (نه صرفاً یک) باشد. ☐

ریشه‌ی دو پرانتز همان مرکز دایره است. در صورتی که ضریب ایکس و ایکلر و پشت پرانتزها یک باشد (روال باشد)، جزر عدد ثابت آنطرف معادله همان شعاع دایره است. ☐

هر نقطه روی محیط دایره دارند سریع فاصله‌اش تا مرکز (همون شعاع) را مناسبه کن: ☐

T شعاع دایره $x^2 + y^2 + 2x + 4y = k$ برابر ۲ است. در این صورت فاصله مرکز دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 2kx + 4ky = 0$ تا مبدأ مختصات کدام است؟

☒ $2(1)$ ☐ $\sqrt{5}(2)$ ☐ $\sqrt{6}(3)$ ☐ $\sqrt{7}(4)$

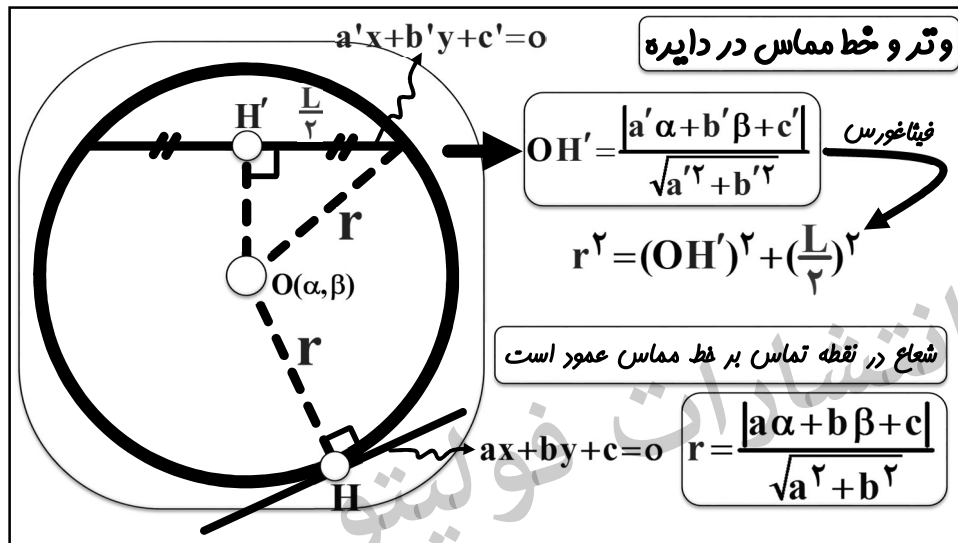
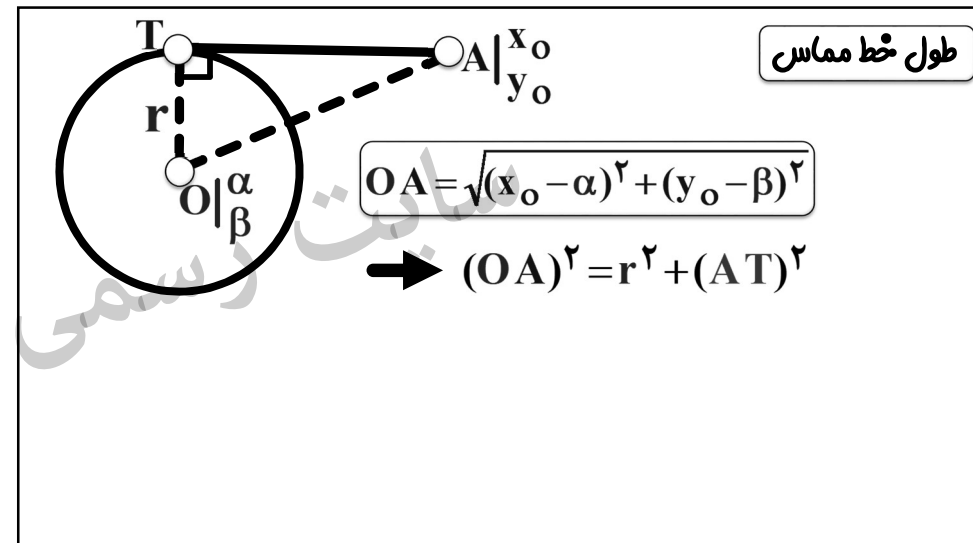
A

T قطر بزرگ یک بیضی ۱۰ و قطر کوچک آن ۸ است. دایره‌ای به مرکز $(-2, 1)$ و شعاعی که نصف فاصله کانونی بیضی باشد، رسم کرده ایم. معادله این دایره کدام است؟

☒ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9(3)$ ☐ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 36(1)$

☐ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9(4)$ ☐ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 36(2)$

A



T از نقطه (۱, ۲) مماسی به طول $2\sqrt{3}$ بر دایره $2x^2 + 2y^2 - 4x + 2ay + 2 = 0$ رسم کرده ایم. مقدار a کدام است؟

۴ (۴) ✓ ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

A

T خط $3x + 4y = 1$ روی دایره ای به مرکز (۵, ۴) وتری به طول ۱۶ ایجاد کرده است. این دایره از کدام نقطه زیر می گذرد؟

(۱۳, -۲) (۴) ✓ (۱۱, -۲) (۳) (۱۳, ۲) (۲) (۱۱, ۲) (۱)

A

T اگر دایره های $(x-10)^2 + (y-8)^2 = m^2$ ، $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ متقاطع باشند، چند جواب طبیعی برای m وجود دارد؟

۵(۴ ۴(۳ ۳(۲✓ ۲(۱

A

T یک دایره به مرکز $(-1, 2)$ با دایره ای به معادله $x^2 + y^2 - 14x - 16y + 77 = 0$ مماس داخل است. شعاع این دایره کدام است؟

۸(۴ ۱۶(۳✓ ۱۲(۲ ۴(۱

A

مفارج

وضعیت ۲ دایره نسبت به هم

$OO' > r + r'$

مماس بیرون

$OO' = r + r'$

مقاطع

$|r - r'| < OO' < r + r'$

مداخل

$OO' < |r - r'|$

مماس درون

$OO' = |r - r'|$

هم مرکز

$OO' = 0$

ریاضیت با من

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

به قلم و روش بهنام سرهنگی